양상 논리의 이해

A Tutorial Introduction to Modal Logics

신승철
동양대학교 컴퓨터학부
Seung Cheol Shin
School of Computer Engineering, Dongyang University
shin@dyu.ac.kr

요 약

고전 논리로 표현하기 어려운 컴퓨터 과학의 여러가지 문제를 다루는 데에는 독특한 형태의 비고전 논리들이 이용된다. 여기서는 컴퓨터 과학 특히 프로그램 분석과 검증 분야에 이론적인 기반을 형성하고 있는 논리 중에서 다양한 응용이 기대되는 양상 논리의 기본적인 개념을 정리하고 고전 논리와의 독특한 차이 등을 설명한다.

1 서 론

수학에서 산술 계산을 체계화하는 전통과 마찬가지로, 논리 계산을 체계화하는 시도와 과정 중에 컴퓨터 과학이 탄생한 역사적인 사실은 잘 알려져 있다[3]. 논리학의 발전 과정 중에서 탄생한 컴퓨터 과학이 논리학과 상호 연계성을 유지하면서 발전하는 것은 놀라운 일이 아니다. 더 나아가 현대 논리학은 수리 논리학과 컴퓨터 과학이 함께 발전시키고 있다고 해도 무리는 없을 것 같다. 이것은 다양하고 풍부한 표현력을 가진 논리 언어와 올바르고(sound) 완전한(complete) 증명 체계(proof system), 언어의 표현에 대한 직관적인 해석을 주는 의미구조(semantics; model; structure) 등 논리에 대한 연구의 필요충분 요건[4, 6]들이 두 분야에 공통적으로 나타나기 때문일 것이다.

프로그래밍 언어 분야는 전통적으로 주된 연구 대상인 프로그래밍 언어의 설계와 구현 뿐 아니라, 프로그램 분석 등을 통한 프로그래밍 언어의 효과적인 이용에 대한 연구가 이론과 실제에 걸쳐 많은 업적을 남겨왔다. 최근 들어 프로그램 검증에 대한 관심이 ‘다시’ 높아지면서 그 기반이라고 할 수 있는 논리에 대한 연구와 관심이 매우 고조되어 있다. 특히 일계 논리(first-order logic)와 같은 고전 논리 뿐 아니라 Hoare 논리, 양상 논리(modal logic), 시제 논리(temporal logic), 동적 논리(dynamic logic) 등 다양한 형태의 비고전 논리들이 관심의 대상이 되고 있다.

양상 논리는 ‘수학의 기초’에 대한 연구로 촉발된 20세기초의 격동기에서 탄생하여 다른 비고전 논리들 보다 오랜 역사를 가지고 있을 뿐 아니라, 시제 논리와 PDL(propositional dynamic logic), 기술 논리(description logic) 등 다양한 현대 논리들의 일반형으로 볼 수 있다는 점에서 주목할 만한 가치가 있다[1]. 본 논문은 양상 논리에 담고 있는 기본적인 생각들을 정리하고 이해할 목적으로 씌여졌다. 따라서 양상 논리에 대한 풍부한 이론은 포함되어 있지 않다. 본 논문에서는 논리의 3대 구성 요소인 언어와 증명 체계, 의미구조가 양상 논리에서는 어떠한 형태를 갖는지를 언어와 의미구조 중심으로 설명하고 증명 체계와 의미구조 사이의 특별한 관계를 설명한다. 이러한 설명을 효과적으로 하기 위해서 3절에서는 간단한 양상 논리를 대상으로 설명한 후에 4절에서 일반형으로 확장하여 설명한다. 5절에

서는 증명 체계와 의미구조간의 관계를 설명하고 6절에서는 기대되는 응용 분야들로 맺음을 한다. 그보다 먼저 양상이란 것이 다양한 형태로 존재한다는 것을 2절에서 설명한다.

2 양상

양상 논리는 말 그대로 양상(樣相; 양식(樣式); modality)을 다루는 논리 체계이다. 양상은 기본적으로 '...이 필연적이다'와 '...이 가능하다'와 같은 표현을 의미한다. 오늘날 우리가 양상 논리라고 일컫는 논리 체계는 Lewis의 연구에서 비롯되었다고 알려져 있다[1][1]. 겉으로 나타나는 논리식의 형태로 볼 때 양상 논리의 언어는 단순히 명제 논리 언어에 몇 개의 양상 연산자를 추가함으로써 얻어진 것이고, 논리식의 의미를 해석함에 있어서는 관계 구조(relational structure)를 기술하는 논리라고 말할 수 있다[2].

여기서 주목할 것은 '...이 필연적이다' 또는 '...이 가능하다'와 같은 양상 표현 뿐 아니라 훨씬 다양한 형태의 양상이 존재할 수 있다는 것이다. 양상 표현의 형태로 어떤 것들을 포함하느냐에 따라서 믿음(belief), 시간(tense), 윤리(deontic) 등에 관한 논리로서 철학적인 논의의 형식적인 분석에 이용될 수 있다. 표 1은 양상 논리의 다양한 형태와 관련 양상 표현들을 양상 연산자를 이용한 논리식과 함께 보여준다.

Alethic	$\Box\,\phi$: ϕ 는 필연적이다 $\Diamond\,\phi$: ϕ 는 가능하다
Deontic	O ϕ : ϕ 는 의무이다 P ϕ : ϕ 는 허용된다 F ϕ : ϕ 는 금지이다
Temporal	G ϕ : ϕ 는 미래에는 항상 참일 것이다 F ϕ : ϕ 는 미래의 어느 순간에는 참이 될 것이다 H ϕ : ϕ 는 과거에는 항상 참이었다 P ϕ : ϕ 는 과거의 어느 순간에 참이었다
Doxastic	$\Box_x\,\phi$: x 는 ϕ 라고 믿는다
Epistemic	$\Box_x\,\phi$: x 는 ϕ 라는 것을 안다
Provability	$\Box\,\phi$: ϕ 는 증명 가능하다

[표 I]1mm 다양한 양상 논리에 대한 양상 연산자와 양상 표현

양상 연산자들은 한 개나 두 개가 사용될 때에는 $\Box$와 $\Diamond$가 사용되고 세 개 이상의 양상 연산자를 포함하는 경우는 보통 아예 다른 이름을 쓰기도 한다.

[1]MacColl의 연구가 Lewis의 것을 앞섰지만 이것은 오늘날 양상 논리와는 거리가 있다.

3 간단한 양상 언어와 의미구조

이제부터는 양상 논리를 형식적으로 정의하고 그 기본 개념을 설명한다. 먼저 가장 간단한 양상 논리를 정의하여 보자. 뒤에 정의될 일반형과 구별하기 위해 이를 기본 양상 논리라고 하자. 기본 양상 논리식을 생성하는 기호들의 집합은 다음 집합들의 합집합이다:

– 명제 기호의 집합 $\Phi = \{p, q, ...\}$
– 명제 논리 연결자의 집합 $= \{\neg, \wedge, \top\}$
– 양상 연산자의 집합 $= \{\Box\}$

명제 논리에서와 같이 $\vee$ 또는 $\to$, $\leftrightarrow$, $\perp$ 등은 위의 명제 논리 연결자들로부터 정의될 수 있다. 또한 양상 연산자 $\Diamond$도 $\Box$로부터 정의할 수 있으므로 명시적으로 포함시키지 않았다. 기호들의 집합으로부터 얻어지는 모든 문자열 중에서 다음의 규칙을 따르는 것들이 기본 양상 논리의 언어를 구성하는 잘-정의된(well-formed) 논리식들이다:

$$\phi \ ::= \ p \ | \ \top \ | \ \neg\phi \ | \ \phi \wedge \psi \ | \ \Box\phi$$

여기서 ϕ와 ψ는 기본 양상 논리식을 나타내고, 양상 연산자는 단항 연산자로서 $\neg$과 같은 연산 순위를 가진다. 다음은 다른 논리 연결자와 양상 연산자를 위의 언어 규칙을 이용하여 정의할 수 있다는 것을 보여준다:

$$\begin{aligned}
\phi \vee \psi &= \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi) \\
\phi \to \psi &= \neg(\phi \wedge \neg\psi) \\
\phi \leftrightarrow \psi &= (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi) \\
\perp &= \neg\top \\
\Diamond\phi &= \neg\Box\neg\phi
\end{aligned}$$

이렇게 만들어진 기본 양상 논리식이 참인지 거짓인지를 해석하기 위해서는 양상 논리식의 의미를 정의할 필요가 있다. 양상 논리식의 의미구조는 관계 구조(relational structure)로서 Kripke 이후에 가능 세계(possible worlds) 의미구조가 가장 널리 받아들여지고 있다. 양상 논리의 가능 세계 의미구조는 크게 골조(frame)와 모델(model)로 나누어 설명할 수 있다.

기본 양상 논리를 위한 골조는 $\mathfrak{F} = (W, R)$ 로 나타내어지고 여기서 W는 모든 가능 세계들의 집합으로 공집합이 아니고, R은 이항 관계로서 $R \subseteq W \times W$이다. 또한 기본 양상 논리에 대한 모델은 골조 $\mathfrak{F}$를 이용하여 $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ 와 같이 나타내어지고, 여기서 $V : \Phi \to \mathcal{P}(W)$는 평가 함수로서 기본 양상 논리식이 주어지면 주어진 논리식이 참인 가능 세계들의 집합을 건네준다.

이렇게 기본 양상 논리의 의미구조가 결정되면 만족 관계(satisfaction relation) $\models$를 재귀적으로 정의할 수 있는데,

$$\mathfrak{M}, w \models \phi$$

는 주어진 모델 $\mathfrak{M}$의 가능 세계 w에서 기본 양상 논리식 ϕ가 참임을 의미한다. 주어진 모델과 가능 세계에서 주어진 기본 양상 논리식이 참이 되는 조건은 다음과 같다.

$$\begin{array}{rll}
\mathfrak{M}, w \models p & \text{if} & w \in V(p), \ \text{where } p \in \Phi \\
\mathfrak{M}, w \models \top & \text{if} & \text{always} \\
\mathfrak{M}, w \models \neg\phi & \text{if} & \mathfrak{M}, w \not\models \phi \\
\mathfrak{M}, w \models \phi \wedge \psi & \text{if} & \mathfrak{M}, w \models \phi \ \text{ and } \ \mathfrak{M}, w \models \psi \\
\mathfrak{M}, w \models \Box\phi & \text{if} & \text{for every } v \in W \text{ such that } Rwv, \ \text{we have } \mathfrak{M}, v \models \phi
\end{array}$$

하나의 논리식이 아닌 논리식의 집합에 대해서도 비슷한 방법으로 만족 관계를 정의할 수 있는데, 논리식의 집합 Σ가 주어지면

$$\mathfrak{M}, w \vDash \Sigma \quad \text{if} \quad \text{all members of } \Sigma \text{ are true at } w$$

와 같이 정의된다. 여기서 $\vDash$ 기호는 간단하게 하기 위해 재사용되었다. 만족 관계를 이용하면 평가 함수 V를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$V(\phi) = \{w \mid \mathfrak{M}, w \vDash \phi\}$$

주어진 논리식 ϕ가 하나의 모델 $\mathfrak{M}$에서 전체적으로(globally) 또는 일반적으로(universally) 참이라고 말할 때에는

$$\mathfrak{M} \vDash \phi \quad \text{if} \quad \mathfrak{M}, w \vDash \phi \;\; \text{for all } w \in W$$

와 같이 쓴다. 또한 논리식 ϕ가 하나의 모델 $\mathfrak{M}$에서 만족가능(satisfiable)하다는 것은

$$\exists w.\, \mathfrak{M}, w \vDash \phi$$

을 의미한다. 논리식의 집합도 주어진 모델 $\mathfrak{M}$에서 전체적으로 참이라면

$$\mathfrak{M} \vDash \Sigma$$

라고 쓰고 다음 조건을 만족한다.

$$\mathfrak{M}, w \vDash \Sigma \;\; \text{for all } w \in W$$

또한 논리식의 집합 Σ가 모델 $\mathfrak{M}$에서 만족가능하기 위해서는

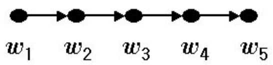
$$\exists w.\, \mathfrak{M}, w \vDash \Sigma$$

을 만족해야 한다.

[**예제 1**] 다음의 골조를 생각해 보자. 이것은 시제 논리에 자주 볼 수 있는 구조이다.

$$\mathfrak{F} = (\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}, R) \quad \text{where } Rw_iw_j \text{ iff } j = i + 1$$

골조 $\mathfrak{F}$를 그림으로 나타내면 그림 1과 같다. 여기에 다음의 평가 함수를 제공하여 모델 $\mathfrak{M}$을



[그림 1] linear time structure

구성해 보자:

$$\begin{aligned} V(p) &= \{w_2, w_3\} \\ V(q) &= \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\} \\ V(r) &= \varnothing \end{aligned}$$

그러면 다음이 참이라는 것을 알 수 있다.

(1) $\mathfrak{M}, w_1 \vDash \Diamond\Box p$

(2) $\mathfrak{M}, w_1 \nvDash \Diamond\Box p \to p$

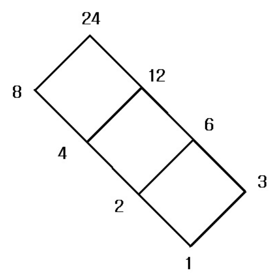
(3) $\mathfrak{M}, w_3 \vDash \Diamond(\neg p \wedge \neg r)$

(4) $\mathfrak{M}, w_1 \vDash q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond q)))$

[**예제 2**] 그림 2는 다음의 골조 $\mathfrak{F}$를 하세(Hasse) 다이어그램으로 나타낸 것이다.

$$\mathfrak{F} = (\{1,2,3,4,6,8,12,24\}, R) \quad \text{where } Rxy \text{ iff } x \neq y \text{ and } x \text{ divides } y$$

여기에 다음의 평가 함수를 제공하자. $V(p) = \{4, 8, 12, 24\}$, $V(q) = \{6\}$



[그림 2] lattice

그러면 다음이 참임을 알 수 있다.

(1) $\mathfrak{M}, 4 \vDash \Box p$

(2) $\mathfrak{M}, 2 \nvDash \Box p$

(3) $\mathfrak{M}, 2 \vDash \Diamond(q \wedge \Box p) \wedge \Diamond(\neg q \wedge \Box p)$

만족 관계의 정의에 의하면 어떤 주어진 가능 세계에서 □나 ◇를 통해 참, 거짓을 따질 때, 모든 가능 세계를 대상으로 하지 않고 이항 관계 R에 의해 접근 가능한 가능 세계만을 대상으로 한다는 것을 주목할 필요가 있다. 이것은 만족 관계를 약화시키는 것이 아니라 오히려 가능 세계들 사이의 접근에 대한 원천적인 제한을 줌으로써 훨씬 다양한 골조를 가능하게 하는 능력을 가진다. 다시 말해서 모든 가능 세계가 다른 가능 세계로 접근 가능하게 하려면 $R = W \times W$로 정하면 되고 반대로 어떤 전이도 불허한다면 $R = \varnothing$로 정하면 된다. 전체적으로 $2^{|W \times W|}$가지의 다양한 이항 관계가 있으므로 그만큼 다양한 골조를 형성할 수 있다.

4 일반 양상 언어와 의미구조

이제 양상 논리를 일반형으로 확장하기 위해 필요한 양상 유사성 유형(modal similarity type)을 정의한다. 유사성 유형 τ는 튜플 (O, ρ)로 정의되고 여기서 O는 양상 연산자 $\triangle, \triangle_0, \triangle_1, ...$의 집합으로 공집합이 아니고, ρ는 각 양상 연산자의 피연산자 개수를 주는 함수 $O \rightarrow \mathbb{N}$이다. 사실, 앞에서 정의된 기본 양상 논리에서는 단 하나의 단항 양상 연산자가 존재하고 이를 □로 표시한 것이다. 만일 두 개 이상의 단항 연산자가 존재한다면 □에 첨자를 붙여서 구별하도록 할 수 있다. 즉, $\Box_a$ 또는 $[a]$ 와 같이 나타낼 수 있다. 여기서 a는 특정한 첨자 집합의 원소이다.

일반 양상 논리(또는 그냥 양상 논리)의 언어 $ML(\tau, \Phi)$은 양상 유사성 유형 $\tau = (O, \rho)$와 명제 기호 집합 Φ를 이용하여 구성된다. 양상 논리의 논리식들은 집합 $Form(\tau, \Phi)$으로 표시되는데 다음의 규칙에 의해 주어진다. 여기서 $p \in \Phi$ 이다.

$$\phi := p \ | \ \bot \ | \ \neg\phi \ | \ \phi_1 \wedge \phi_2 \ | \ \triangle(\phi_1, ..., \phi_{\rho(\triangle)})$$

피연산자를 갖지 않는 양상 연산자는 양상 상수(modal constant; nullary modality)라고 하는데, 이를 제외한 모든 양상 연산자 $\triangle \in O$는 쌍대 ∇를 갖고 $\nabla(\phi_1, ..., \phi_n) = \neg\triangle(\neg\phi_1, ..., \neg\phi_n)$ 와 같이 정의된다. 기본 양상 논리에서는 $\Box$의 쌍대를 $\Diamond$로 표시한다. 따라서 $\Box_a$ 또는 $[a]$의 쌍대는 $\Diamond_a$ 또는 $\langle a \rangle$이다.

일반 양상 논리의 의미구조를 정의해 보자. 일반 양상 논리의 골조는 유사성 유형 τ에 의해 특징지어 지는데, 이것은 골조의 두번째 구성요소가 단 하나의 관계가 아닌 관계들의 집합이 되고 각 관계들은 τ의 각 양상 연산자에 결합되어 지기 때문이다. 따라서 일반 양상 논리에서의 골조는 유사성 유형을 명시적으로 나타내고자 할 때 'τ−골조'라고 하고 다음과 같이 표시한다. 이때 τ는 간단한 표기를 위해 ρ를 생략하고 O와 구별하지 않기로 한다.

$$\mathfrak{F} = (W, R_\triangle)_{\triangle \in \tau} \quad \text{또는} \quad \mathfrak{F} = (W, \{R_\triangle \mid \triangle \in \tau\})$$

여기서 유사성 유형 τ의 원소인 양상 연산자 $\triangle$이 n 개의 피연산자를 갖는다고 할 때($n \geq 0$), $(n+1)$항 관계 $R_\triangle$가 포함된다.

τ−모델도 마찬가지로 정의되는데, $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ 와 같이 표시되고 $\mathfrak{F}$는 τ−골조이고 $V : \Phi \rightarrow \mathcal{P}(W)$는 평가 함수이다.

이제 만족 관계를 다음과 같이 다시 정의할 수 있다.

$$\begin{array}{rll}
\mathfrak{M}, w \vDash p & \text{if} & w \in V(p), \ \text{where } p \in \Phi \\
\mathfrak{M}, w \vDash \top & \text{if} & \text{always} \\
\mathfrak{M}, w \vDash \neg\phi & \text{if} & \mathfrak{M}, w \nvDash \phi \\
\mathfrak{M}, w \vDash \phi \wedge \psi & \text{if} & \mathfrak{M}, w \vDash \phi \quad \text{and} \quad \mathfrak{M}, w \vDash \psi \\
\mathfrak{M}, w \vDash \triangle(\phi_1, ..., \phi_n) & \text{if} & \text{for every } v_1, ..., v_n \in W \text{ such that } R_\triangle w v_1 ... v_n, \\
 & & \quad \text{we have, for each } i, \ \mathfrak{M}, v_i \vDash \phi_i
\end{array}$$

이때 $\rho(\triangle) = 0$ 이면

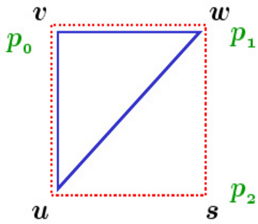
$$\mathfrak{M}, w \vDash \triangle \quad \text{if} \quad w \in R_\triangle$$

로 정의된다. $R_\triangle$은 가능 세계들의 집합으로서 $\triangle$은 명제 p와 비슷하게 생각될 수 있다. 그러나 명백한 차이가 있는데 그것은 명제 p는 평가 함수가 주어져야만 진리값을 알 수 있기 때문에 주어진 모델에서만 해석될 수 있는 데에 반해, $\triangle$은 평가 함수와 관계없으므로 골조에서 즉, 모든 평가 함수에 대하여 같은 진리값으로 해석될 수 있다.

[예제 3] 양상 유사성 유형 $\tau = (\{\triangle, \odot\}, \{\triangle \mapsto 2, \odot \mapsto 3\})$ 에 대하여 τ−골조 $\mathfrak{F} = (\{u, v, w, s\}, R_\triangle, S_\odot)$가 주어졌다고 하자. 여기서 3항 관계 $R_\triangle = \{(u, v, w)\}$과 4항 관계 $S_\odot = \{(u, v, w, s)\}$이 주어지고 평가 함수가 $V(p_0) = \{v\}, V(p_1) = \{w\}, V(p_2) = \{s\}$ 와 같다고 하면 τ−모델은 그림 3과 같다. 그림 3에서 점선으로 표시된 것은 $S_\odot$에서 관계를 갖는 가능 세계들을 묶은 것이고 실선으로 나타난 것은 $R_\triangle$에서 관계있는 가능 세계를 묶은 것이다. 그러면 다음 관계는 만족된다.

(1) $\mathfrak{M}, u \vDash \triangle(p_0, p_1) \rightarrow \odot(p_0, p_1, p_2)$

(2) $\mathfrak{M} \vDash \triangle(p_0, p_1) \rightarrow \odot(p_0, p_1, p_2)$



[그림 3] multimodal

지금까지 양상 논리식들은 모델에 대한 언급을 위해 씌여졌다. 모델은 골조와 평가 함수가 결합된 형태인데, 평가 함수는 주어질 수 있는 하나의 사례적인 정보를 나타낸다. 다시 말해서, 하나의 골조가 주어지고 거기에 어떤 평가 함수가 결합하느냐에 따라서 여러가지 모델을 생성하게 된다. 여기서 평가 함수의 효과를 무시함으로써 양상 논리식이 골조에 대한 언급이 되도록 일반화시킬 수 있다. 이러한 개념을 타당성(validity)[2] 라고 하는데, 주어진 양상 논리식이 하나의 골조에서 타당하다는 것은 그 골조에서 만들 수 있는 모든 모델에서 그 논리식이 참이라는 것을 의미한다. 이것을 형식적으로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathfrak{F}, w \vDash \phi \quad \text{iff} \quad \mathfrak{M}, w \vDash \phi \ \text{ for every } \mathfrak{M} \text{ such that } \mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$$
$$\mathfrak{F} \vDash \phi \quad \text{iff} \quad \mathfrak{F}, w \vDash \phi \ \text{ for every } w \in W$$

첫번째는 주어진 골조에서 특정 가능 세계 w를 명시적으로 언급한 것이고 두번째는 모든 가능 세계에 대하여 언급하고 있다. 이것을 더 일반화시켜서 하나의 골조가 아닌 골조들의 특정 모임이나 모든 골조에 대하여 말할 수 있는데 다음과 같다.

$$\mathsf{F} \vDash \phi \quad \text{iff} \quad \mathfrak{F} \vDash \phi \quad \text{for every } \mathfrak{F} \text{ in a class of frames } \mathsf{F}$$
$$\vDash \phi \quad \text{iff} \quad \mathfrak{F} \vDash \phi \quad \text{for every } \mathfrak{F}$$

여기서 유의할 것은 참거짓을 말할 때와 타당성을 말할 때 다른 상황을 많이 만들어낼 수 있는데, 예를 들면 $\phi \vee \psi$와 같은 논리식이 그렇다. 즉, $\phi \vee \psi$가 가능 세계 w에서 참이라는 것은 ϕ 또는 ψ 이 w에서 참이라는 것과 동치이지만, $\phi \vee \psi$이 골조 $\mathfrak{F}$에서 타당하다는 것은 ϕ 또는 ψ 이 $\mathfrak{F}$에서 타당하다는 것과는 동치가 아니다.

[예제 4] $\Diamond(p \vee q) \to (\Diamond p \vee \Diamond q)$ 이 모든 골조에 대하여 타당한지를 증명해 보자.
(증명) 임의의 $\mathfrak{F}, w, V$ 를 취하고 $(\mathfrak{F}, V), w \vDash \Diamond(p \vee q)$ 임을 가정하자. 그러면 정의에 의해서 Rwv 이고 $(\mathfrak{F}, V), v \vDash p \vee q$ 인 v 가 존재한다. 그런데 $(\mathfrak{F}, V), v \vDash p \vee q$ 이면 $(\mathfrak{F}, V), v \vDash p$ 이거나 $(\mathfrak{F}, V), v \vDash q$ 이다. 따라서 $(\mathfrak{F}, V), w \vDash \Diamond p$ 이거나 $(\mathfrak{F}, V), w \vDash \Diamond q$ 이고 어느 쪽이든 $(\mathfrak{F}, V), w \vDash \Diamond p \vee \Diamond q$ 이다.

[예제 5] $\Box p \to \Box\Box p$ 이 모든 골조에 대하여 타당하지 않다는 것을 증명해 보자.
(증명) $\mathfrak{F} = (\{0, 1, 2\}, \{(0, 1), (1, 2)\}\}$ 와 $V(p) = 1$ 을 취하면 반례를 만들수 있다. 즉, $(\mathfrak{F}, V), 0 \vDash \Box p$ 이지만 $(\mathfrak{F}, V), 0 \vDash \Box\Box p$ 는 아니다.

양상 논리의 의미구조로 만들어지는 관계 구조는 골조와 모델이고 이 둘은 주어지는 평가 함수에 의해서 구분된다고 할 수 있다. 모델에서는 논리식의 만족 가능성을 말하고 골

[2] 고전 논리에서는 항진성이라고 부르기도 하는 것으로 용어의 혼동에 유의하자.

조에서는 논리식의 타당성을 말한다[3]. 만족 가능성은 주어진 골조에 단 하나의 평가 함수를 결합한 모델에서 언급되고, 타당성은 골조에 임의의 모든 평가 함수를 결합한 형태에서 언급된다. 따라서 모델에서는 평가 함수의 역할로 인해서 골조의 성질이 상대적으로 작게 나타나고, 반대로 골조에서는 골조의 성질이 부각되지만 평가 함수가 주는 구체적인 특징은 사라진다. 여기서 이 둘 사이의 중간 형태를 생각해 보자. 즉, 단 하나의 평가 함수도 아니고 임의의 모든 평가 함수도 아닌, 자격있는(admissible) 평가 함수들만이 결합될 수 있는 골조를 생각할 수 있는데, 이를 일반 골조(general frame)이라고 부른다[4].

골조를 기반으로 하는 타당성보다 수학적으로 더 풍부한 타당성 개념을 만들면서도 평가 함수의 특징을 완전히 배제하지 않는 방편으로서 일반 골조가 고안되었다. 일반 골조는 연산자가 추가된 부울 대수(boolean algebra with operators)를 집합론적인 표현으로 나타낸 것이라고 할 수 있는데, 여기서 자격있는 평가 함수들은 논리 연결자와 양상 연산자에 대응하는 집합 연산에 대하여 닫혀있는 특수한 집합으로부터 만들어진다. 이 특수한 집합에 대한 자세한 사항은 일반 골조의 형식적인 정의에서 분명하게 들어날 것이다.

논리 연결자에 대응하는 집합 연산은 이미 잘 알려져 있지만, 양상 연산자에 대응하는 집합 연산은 어떤 것일까? 먼저 단항 양상 연산자 $\Box$를 생각해 보자. 이항 관계 R이 주어지면 골조 $\mathfrak{F} = (W, R)$을 생각할 수 있고, $X \subseteq W$에 대하여 집합 연산 $m_R : \mathcal{P}(W) \rightarrow \mathcal{P}(W)$을 다음과 같이 정의하여 보자.

$$m_R(X) = \{w \in W \mid Rwx \text{ for all } x \in X\}$$

그러면 임의의 V와 ϕ에 대하여 $V(\Box\phi) = m_R(V(\phi))$ 이므로 연산 m_R는 $\Box$에 대응되는 집합 연산이라고 할 수 있다. 이 연산의 일반형을 나타내면 다음과 같다. 주어진 $(n+1)$항 관계 R과 집합 W에 대하여

$$m_R(X_1, ..., X_n) = \{w \in W \mid Rww_1...w_n \text{ for all } w_1 \in X_1, ..., w_n \in X_n\}$$

와 같이 정의한다. 그러면 m_R은 n항 양상 연산자에 해당한다.

이제 일반 골조를 형식적으로 정의해 보자. 일반 $\tau-$골조는 $(\mathfrak{F}, A)$로 표시되고 여기서 $\mathfrak{F} = (W, R_\triangle)_{\triangle \in \tau}$ 이고, A는 W의 부분집합들의 집합 $(A \subseteq \mathcal{P}(W))$으로서 다음 연산에 닫혀있다:

(i) 교집합: $X, Y \in A$ 이면 $X \cap Y \in A$ 이다.

(ii) 차집합: $X \in A$ 이면 $W \setminus X \in A$ 이다.

(iii) 양상 연산: 모든 $\triangle \in \tau$ 에 대하여 $X_1, ..., X_n \in A$ 이면 $m_{R_\triangle}(X_1, ..., X_n) \in A$ 이다.

일반 골조를 기반으로 하는 모델은 $(\mathfrak{F}, A, V)$와 같은 형태이고 $(\mathfrak{F}, A)$는 일반 골조이고 V는

$$\forall p \in \Phi . \exists X \in A . V(p) = X \tag{1}$$

을 만족하는 평가 함수이다. 이때 조건 (1)을 만족하는 평가 함수를 자격있다고 한다. 이와 같은 방법으로 정의된 일반 골조는 양상 논리를 대수적으로 다루고자 할 때 시작점이 된다.

지금까지는 골조나 일반 골조에서의 타당성 개념이 논리적으로 항상 참인 논리식들을 언급하였다. 이제는 양상 논리에서 논리적인 귀추 관계(logical consequence realtion)는 어떻게 정의되어야 하는지에 대하여 설명한다. 즉, 양상 논리식의 집합 Σ가 어떤 하나의 양상 논리식 ϕ를 논리적으로 함의한다(entail)는 것이 무슨 의미인지를 정의하고자 한다.

---

[3]여기서는 주어진 하나의 가능 세계에서의 만족 가능성과 타당성에 대하여 말하고 있다. 만일 주어진 모델이나 골조의 모든 가능 세계에 대하여 말한다면 전체적으로 참인지(globally true) 또는 골조의 모든 가능 세계에서 타당한지(valid at all possible worlds)가 대조를 이룰 것이다.

[4]'일반' 골조라는 이름을 갖게 된 이유는 평가 함수들이 갖추어야 하는 자격을 어떻게 부여하느냐에 따라서 일반 골조의 특징이 결정되므로 지금까지 보았던 골조는 이 일반 골조의 특수한 형태로 볼 수 있기 때문이다.

논리적인 귀추 관계는 지역적으로(locally) 또는 전체적으로(globally) 정의될 수 있는데, 두 경우 모두 의미구조적으로(semantically) 정의된다. 의미구조적이라 함은 골조, 모델, 일반 골조 등의 관계 구조를 기반한다는 것이다. 따라서 귀추 관계는 어떤 관계 구조에 대하여 언급하는 지를 명시적으로 표기할 필요가 있다.

형식적으로 말하면, 양상 논리식 ϕ가 관계 구조들의 집합 S에 대하여 논리식 집합 Σ의 지역적인 귀추(local consequence)라는 것을 S : $\Sigma \vDash_{\mathsf{S}} \phi$ 로 나타내고, S로부터의 모든 모델 $\mathfrak{M}$에 대하여 그리고 $\mathfrak{M}$의 모든 가능 세계 w에 대하여 $\mathfrak{M}, w \vDash \Sigma$ 이면 $\mathfrak{M}, w \vDash \phi$ 임을 의미한다. 또, 논리식 ϕ가 S에 대하여 논리식 집합 Σ의 전체적인 귀추(global consequence)라는 것은 S : $\Sigma \vDash^g_{\mathsf{S}} \phi$ 로 표기하고, S의 원소인 모든 관계 구조 $\mathfrak{S}$에 대하여 $\mathfrak{S} \vDash \Sigma$ 이면 $\mathfrak{S} \vDash \phi$ 임을 의미한다.

5 공리계와 그 확장

앞에서 우리는 양상 논리의 의미구조적인 면에 대하여 살펴보았다. 논리는 구문적인 면을 가지고 있는데, 주어진 골조의 집합 F에 대하여 F에서 타당한 논리식들을 생성해 내는 구문적인 메카니즘이 있다. 이것을 증명 체계라고 한다. 증명 체계는 공리계(axiomatic system), 자연 연역 체계(natural deduction system), 태블로 기법(tableaux method), 분해 기법(resolution method) 등이 있다. 여기서는 설명을 간단하게 하기 위해 공리계만을 다루기로 한다.

가장 간단한 형태의 공리계는 **K**라는 이름으로 불리는데, **K**는 힐버트 방식의 공리계(Hilbert-style axiom system)로서 골조에 대한 추론을 하는 가장 작은(minimal; weakest) 체계이다. 공리계는 공리들의 집합과 증명 규칙의 집합으로 이루어지는데, 공리들의 집합을 확장함으로써 더 큰 공리계를 얻을 수 있다.

증명 체계에 대하여 논함에 있어서 여기서는 기본 양상 논리를 대상으로 한다. 증명 체계 **K**의 공리들은 다음으로 구성된다:

- 명제 논리의 모든 항진 논리식
- (K) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

여기서 (K)는 설명을 목적으로 공리의 이름으로 붙은 것이다. 물론 여기서 $\Diamond\phi = \neg\Box\neg\phi$도 공리에 포함되어야 하지만 공리계의 확장 부분을 강조하기 위해서 다른 논리 연결자의 쌍대들과 함께 묵시적인 채로 남겨두도록 한다. **K**의 증명 규칙은 다음과 같다:

- 긍정 추론(modus ponens): ϕ와 $\phi \to \psi$이 주어지면 ψ는 증명된다.
- 일률적인 치환(uniform substitution): ϕ가 주어지면, ϕ 안의 명제 기호들을 임의의 논리식으로 치환하여 얻어진 θ는 증명된다.
- 필연 추론(necessitation): ϕ가 주어지면 $\Box\phi$는 증명된다.

K-증명(**K**-proof)은 논리식들의 유한한 시퀀스로서 각 논리식들은 공리이거나 시퀀스의 앞쪽에 등장한 하나 이상의 논리식으로부터 증명 규칙을 적용하여 얻어낸 논리식이다. 이것은 힐버트 방식의 증명인데, 논리식 ϕ가 어떤 **K**-증명의 맨 마지막 항목으로 나타나면 논리식 ϕ는 **K**-증명 가능하다(**K**-provable)고 하고 $\vdash_{\mathbf{K}} \phi$와 같이 표시한다.

증명 체계가 정의되면 그 증명 체계를 통해 증명된 논리식이 타당하지 않은 경우는 없는지 또는 타당한 논리식 중에서 증명할 수 없는 것은 없는지를 확인해야 한다. 임의의 증명 체계 **X**에 대하여 모든 **X**-증명가능한 논리식들이 모든 골조의 집합에 대하여 타당하면 즉,

$$\{\phi \mid \ \vdash_{\mathbf{X}} \phi\} \subseteq \{\phi \mid \ \vDash \phi\}$$

이면 **X**는 올바르다(sound)고 한다. 또한 모든 골조들의 집합에 대하여 타당한 논리식들이 모두 **X**-증명가능하면 다시말해서,

$$\{\phi \mid \vdash_{\mathbf{X}} \phi\} \supseteq \{\phi \mid \models \phi\}$$

이면 **X**는 완전하다(complete)고 한다. 그런 의미에서 증명 체계 **K**는 올바르고 완전하다고 알려져 있다.

[예제 6] 양상 논리식 $(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$는 타당한가?
(증명) 다음 힐버트 방식의 증명을 통해 타당하다는 것을 증명한다:

1. $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$	Tautology
2. $\vdash \Box(p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q)))$	Necessitation: 1
3. $\vdash \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$	K axiom
4. $\vdash \Box(p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box(q \rightarrow (p \wedge q)))$	Uniform substitution: 3
5. $\vdash \Box p \rightarrow \Box(q \rightarrow (p \wedge q))$	Modus ponens: 2,4
6. $\vdash \Box(q \rightarrow (p \wedge q)) \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q))$	Uniform substitution: 3
7. $\vdash \Box p \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q))$	Propositional logic: 5,6
8. $\vdash (\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$	Propositional logic: 7

이제 **K** 체계에 하나의 공리를 추가하여 새로운 공리계 **K4**를 만들어 보자. **K4**의 공리 집합은 다음과 같다:

- 명제 논리의 모든 항진 논리식
- (K) $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$
- (4) $\Box p \rightarrow \Box\Box p$

이때 (4)가 바로 추가적으로 주어진 공리의 이름을 나타낸다. **K4**의 증명 규칙은 **K**의 증명 규칙과 같다.

그러면 **K**는 모든 골조에서 올바르고 완전한 가장 작은 공리계이므로 **K**로부터 시작해서 다양한 형태의 공리계를 만들어 낼 수 있다는 것을 알 수 있다. 여기서 주목할 것은 공리계가 갖는 특성인데 주어진 공리계에서 타당하다고 증명 가능한 논리식들이 특별한 성질을 갖는 골조에서 타당하다는 것이다. 그리고 그 반대도 성립한다. 즉, 공리계와 이에 대응되는 골조의 성질이 있다는 것이다. 예를 들어

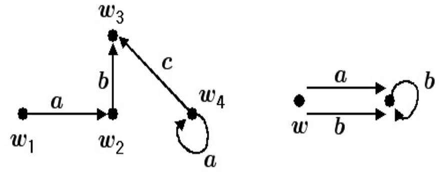
$$\Sigma \vdash_{\mathsf{K4}} \phi \quad \text{iff} \quad \Sigma \models_{\mathsf{Tran}} \phi$$

임을 알 수 있는데, 즉, **K4** 체계에서 증명가능한 논리식은 골조의 첫번째 요소인 관계가 추이 관계일때 그 골조에서 타당하다는 것이다. 또 반대로 추이 관계를 갖는 골조에서 타당한 논리식은 **K4**-증명가능하다. 골조의 첫번째 요소인 관계가 추이 관계일 때 그 골조를 추이 골조라고 부르기로 하고, 다음 예제를 살펴보자.

[예제 7] $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ 는 추이 골조에서 타당한가?
(증명) 임의의 추이 골조 $\mathfrak{F}$와 가능 세계 w, 평가 함수 V 를 취하고 $(\mathfrak{F}, V), w \models \Box p$ 임을 가정하자. 그러면 $\mathfrak{F} = (R, W)$ 일때 정의에 의해서 Rwu 인 모든 u 에 대하여 $(\mathfrak{F}, V), u \models p$ 이다. 그런데 R 이 추이 관계이므로 Rwu 이고 Ruv 인 모든 v 에 대하여 Rwv 이고 $(\mathfrak{F}, V), v \models p$ 이다. 따라서 $(\mathfrak{F}, V), w \models \Box\Box p$ 임을 알 수 있다.

추이 골조에서 타당한 $\Box p \rightarrow \Box\Box p$을 공리 (4)로서 채택함으로써 **K4** 체계는 추이 골조에서 타당한 모든 논리식을 증명 가능하게 한다. 다음 예제는 관계 구조와 양상 논리식 사이의 관계를 설명하고 있다.

[**예제 8**] 그림 4에는 두 개의 골조를 보여준다. 여기에는 두 개 이상의 관계 R_a, R_b, R_c가 등장한다. 각각 단항 양상 연산과 대응된다. 이 두 개의 골조 중에서 논리식 $\langle a\rangle p \to \langle b\rangle p$이 타당한 것은 어느것일까? 첫번째 골조에서는 $V(p) = \{w_2\}$일때 참이 되지 않으므로 타당하



[그림 4] 두 개의 골조

지 않다는 것을 쉽게 알 수 있다. 두번째 골조에서는 타당한데 이것은 $R_a \subseteq R_b$임을 확인함으로써 알 수 있다. 다시 말해서 논리식 $\langle a\rangle p \to \langle b\rangle p$이 타당하기 위해서는 골조의 요소인 관계들이 $R_a \subseteq R_b$을 만족해야 한다는 것이다.

사실 더 많은 공리와 골조 사이의 관계가 연구되어 알려져 있다. 공리계에 어떤 공리를 포함시키느냐에 따라 대응되는 골조의 성질이 결정되는 데, 잘 알려진 결과들을 정리하여 나타내면 다음과 같다:

공리 이름	공리	골조의 조건	R의 성질
(D)	$\Box p \to \Diamond p$	$\exists u.wRu$	Serial
(M)	$\Box p \to p$	wRw	Reflexive
(4)	$\Box p \to \Box\Box p$	if (wRv and vRu) then wRu	Transitive
(B)	$p \to \Box\Diamond p$	if wRv then vRw	Symmetric
(5)	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	if (wRv and wRu) then vRu	Euclidean
(CD)	$\Diamond p \to \Box p$	if (wRv and wRu) then $v = u$	Deterministic
$(\Box M)$	$\Box(\Box p \to p)$	if wRv then vRv	Shift Reflexive
$(C4)$	$\Box\Box p \to \Box p$	if wRv then $\exists u.(wRu$ and $uRv)$	Dense
(C)	$\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$	if (wRv and wRx) then $\exists u.(vRu$ and $xRu)$	Convergent

양상 논리는 그 공리계에 어떤 공리들을 포함하느냐에 따라 다양한 형태로 나타나고 대응되는 골조의 모습도 결정된다. 이렇게 다양한 양상 논리들의 관계를 한 눈에 볼 수 있도록 만들어진 그림 표현[5]이 있는데 그림 5와 같다.

여기서 우리는 자연스럽게 골조의 성질과 공리의 형태 사이에 어떤 일반적인 관계를 찾을 수 있는가 하는 질문을 할 수 있다. Scott과 Lemmon은 이 부분에 대한 해답을 하나 내놓았는데, 공리의 일반형과 관계 성질의 일반형을 고안하여 대응시키는 것이다. 일반형의 공리 (G)를 다음과 같이 정의하면

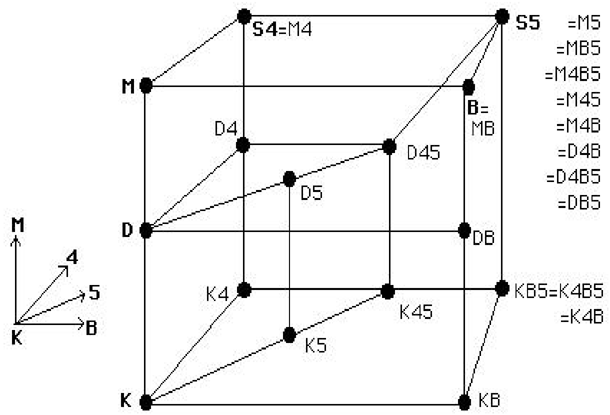
$$\text{(G)} \quad \Diamond^h \Box^i p \to \Box^j \Diamond^k p$$

앞에서 **K4**에서 도입했던 공리 (4)는 다음과 같이 표현 가능하다.

$$(4) \quad \Box p \to \Box\Box p = \Diamond^0 \Box^1 p \to \Box^2 \Diamond^0 p$$

여기서 얻은 h, i, j, k 값을 가지고 다음의 관계 성질의 일반형에 대입하면

$$\text{(hijk-Convergence)} \quad \text{if } R^h wv \text{ and } R^j wu \text{ then } \exists x.(R^i vx \text{ and } R^k ux)$$



[그림 5] modal cube

다음과 같은 관계 성질을 얻을 수 있고

$$\text{(0120-Convergence)} \quad \text{if } R^0wv \text{ and } R^2wu \text{ then } \exists x.(R^1vx \text{ and } R^0ux)$$

이것은 정확하게 다음의 추이 관계를 나타내는 성질이라는 것을 어렵지 않게 증명할 수 있다.

$$\text{(transitivity)} \quad \text{if } Rvx \text{ and } Rxu \text{ then } Rvu$$

사실 그후에 Sahlqvist는 Scott과 Lemmon의 결과보다 더 넓은 범위를 포함하는 일반형을 고안하였다. 관심있는 독자는 참고문헌 [7]을 참고하기 바란다.

6 결론

본 논문에서는 양상 논리의 언어, 의미구조, 공리계 등 기본 요소에 대하여 살펴보고 고전 논리와의 차이점이나 양상 논리의 독특함을 이해하고자 하였다. 특히 공리계와 골조와의 관계는 프로그램의 제어 구조나 프로그램의 실행 트리 등 관계 구조에 대하여 그 성질을 추리해야 하는 프로그램 분석 및 검증 분야에서는 눈여겨 볼 만하다.

논리학은 인간 이성의 한계를 수학적인 엄밀함을 가지고 접근한다는 의미에서 매우 흥미있는 분야일 뿐 아니라 넓게는 컴퓨터 과학, 좁게는 프로그램 분석과 검증 분야의 토대이고 핵심으로서 매우 중요한 부분이다. 양상 논리는 고전 논리에서 표현하기 어색한 컴퓨팅의 성질들을 표현하는 데에 보다 효율적이고 자연스럽기 때문에 그 대안으로서 많은 연구자들에게 고려되고 있다. 또한 시제 논리, 동적인 논리, 고정점 논리 등 다양한 비고전 논리 분야와 모델 검사, 의미구조론, bisimulation, 양상 성질에 대한 분석과 검증 등 시스템 분석 및 검증 분야가 양상 논리에 대한 관심을 높이는 역할을 하고 있다.

특히 양상 논리로부터 얻어지는 타입 시스템은 어떤 모습이고 어떤 활용성을 가질 지에 대하여 많은 관심이 모아지고 있다. 다음과 같은 분야에서 양상 타입 시스템이 중요한 역할을 할 것으로 기대된다: 실행시간 코드생성, 메타 프로그래밍, 점진적인 계산(incremental computation), 정보 흐름 보안성 분석(information flow security), 분산 컴퓨팅, 자원이 제한된 계산을 위한 분석(resource-bounded computation) 등.

감사의 글

논리학 공부에 대한 관심과 토론을 통해 격려해 주신 LiComR group의 경북대 정주희교수님과 경성대 변석우 교수님께 감사를 드립니다.

참고문헌

[1] Blackburn, P., M. de Rijke, and Y.Venema, Modal logic, Cambridge University Press, 2001

[2] Chellas, B., Modal Logic: An Introduction, Cambridge University Press, 1980

[3] Davis, M., Universal computer: the road from Frege to Gödel, Norton, 2000

[4] van Dalen, D., Logic and Structure, Springer, third edition, 1994

[5] Garson, J., "Modal Logic", The Stanford Encyclopedia of Philosophy, Edward N. Zalta (ed.), URL = http://plato.stanford.edu/archives/win2003/entries/logic-modal/

[6] Ryan, M. and M. Sadler, "Valuation systems and consequence relations", Handbook of logic in computer science, S. Abramsky, D.M. Gabbay, and T.S.E. Maibaum (ed.), Oxford University Press, 1992

[7] Sahlqvist, H., "Completeness and Correspondence in First and Second Order Semantics for Modal Logic," in Kanger, S. (ed.) Proceedings of the Third Scandanavian Logic Symposium, Amsterdam: North Holland. 110-143, 1975

신승철

– 1983-1987 인하대 전자계산학과 학사
– 1987-1989 인하대 전자계산학과 석사
– 1992-1996 인하대 전자계산학과 박사
– 1999-2000 캔사스주립대 연구원
– 1996-현재 동양대 컴퓨터학부 조교수

관심분야: 프로그래밍 언어, 프로그램 분석/검증, 소프트웨어 보안, 수리 논리